ОРМО 2017-2018 I этап
МАТЕМАТИКА
11 класс Вариант 1

1. Решить неравенство $\left|x^3-x+1\right|<x+1$.

(7 баллов)

Ответ: $\left(0;\sqrt{2}\right)$.

Решение. $\left|x^3-x+1\right|<x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ \left|x^3-x+1\right|^2<\left(x+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ \left(x^3-x+1\right)^2-\left(x+1\right)^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left(x^3-x+1-x-1\right)\left(x^3-x+1+x+1\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left(x^3-2x\right)\left(x^3+2\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\left(x^2-2\right)\left(x^3+2\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0;\sqrt{2}\right).$$

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Все действия, связанные с раскрытием модуля и решением неравенств, выполнены верно, но из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ – 4 балла.
Получен верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

2. Найти количество целых значений, которые принимает функция $y=2\cos 2x-12\sin x-6$.

(8 баллов)

Ответ: 25.

Решение. Запишем функцию в виде $y=-4\sin^2 x-12\sin x-4 \Leftrightarrow y=5-4\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)^2$. Обозначим $t=\sin x, t\in\left[-1;1\right]$, тогда $y=5-4\left(t+\frac{3}{2}\right)^2$, $t\in\left[-1;1\right]$. Отсюда, получаем, что $y_{наим}=y\left(1\right)=-20$, $y_{наиб}=y\left(-1\right)=4$. Таким образом, множеством значений искомой функции, является промежуток $\left[-20;4\right]$. Этот промежуток содержит 25 целых значений.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 8 баллов.
Решение сведено к нахождению множества значений функции $y=-4t^2-12t-4$ на отрезке $\left[-1;1\right]$, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 5 баллов.
Решение сведено к нахождению множества значений функции $y=-4t^2-12t-4$ на отрезке $\left[-1;1\right]$, но решение не завершено – 2-3 балла.

3. Решить в целых числах уравнение $x^3+y^3=20172018$.

(10 баллов)

Ответ: целочисленных решений нет.

Решение. Так как x^3 и y^3 при делении на 9 могут давать только остатки 0, 1 и 8 то x^3+y^3 может давать только остатки 0, 1, 2, 7 и 8. Но число 20172018 при делении на 9 даёт остаток 3. Поэтому исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 10 баллов.
Рассуждения в целом верные, но правильный ответ недостаточно обоснован – 3 балла.
Получен верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

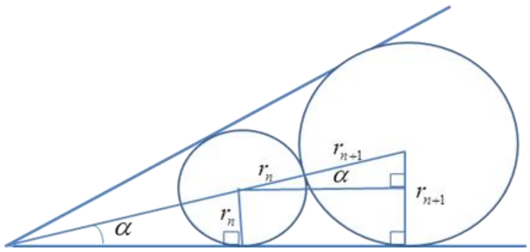
4. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найти сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна 64π.

(10 баллов)

Ответ: 12π.

Решение. Для радиусов r_n и r_{n+1} предыдущей и следующей окружности выполнено соотношение (см. рис.)

$$r_{n+1}-r_n=(r_{n+1}+r_n)\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=q\ ,$$



т.е. радиусы $r_1, r_2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию, причем $r_1=1,\ \pi r_4^2=\pi q^6=64\pi \Rightarrow q=2$, отсюда получаем, что $2\pi r_2+2\pi r_3=2\pi(r_1q+r_1q^2)=2\pi(2+2^2)=12\pi$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 10 баллов.
Доказано, что радиусы образуют геометрическую прогрессию, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 8 баллов; или решение в этом случае не завершено – 4 балла.
Получен верный ответ с указанием, но без доказательства, что радиусы образуют геометрическую прогрессию – 2 балла.
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

5. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых множество решений неравенства $ax^2-2ax+x-2>0$ содержит только одно целое число.

(15 баллов)

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right]$.

Решение. Очевидно, что $a=0$ не подходит. Тогда при $a\neq 0$, найдя корни соответствующего квадратного трехчлена, получим $a(x-2)\left(x+\frac{1}{a}\right)>0$. Если $a>0$, то решением этого неравенства будет неограниченное множество чисел (объединение двух лучей). Поэтому остается рассмотреть случай, когда $a<0$. Тогда решением неравенства $(x-2)\left(x+\frac{1}{a}\right)<0$ будет интервал $\left(2;-\frac{1}{a}\right)$ при $-\frac{1}{a}>2$ или интервал $\left(-\frac{1}{a};2\right)$ при $-\frac{1}{a}<2$ (значение $a=-\frac{1}{2}$ также не отвечает на вопрос задачи).

Интервал $\left(2;-\frac{1}{a}\right)$ будет содержать только одно целое число тогда и только тогда, когда будет выполняться условие $\begin{cases}-\frac{1}{a}>3\\ -\frac{1}{a}\le 4\end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right]$. Аналогично, рассматривая интервал $\left(-\frac{1}{a};2\right)$, получим условие $\begin{cases}-\frac{1}{a}\ge 0\\ -\frac{1}{a}<1\end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;-1)$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 15 баллов.
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a = -\frac{1}{4}$ – 12 баллов.

В решении верно найдены все граничные точки множества a: -1, -1/3 , -1/4 , но неверно определены промежутки значений a – 8 баллов.
Ход решения в целом верен, но неверно найдены граничные точки множества значений a из-за вычислительной ошибки – 6 баллов.

Обоснованно получен ответ, содержащий только один из промежутков: $\left(-\infty;-1\right)$ или $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right]$ – 4 балла.
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.